**III. Fogalmak**:

Egy literál egy Boolean változó, amit pozitív literálnak, vagy a negáltját a Boolean változónak negatív literálnak nevezzük. Literálokra példa:

Egy klóz literálok halmaza. Egy klóz halmaz, pedig egy halmaz klóz. Egy SAT probléma is egy klóz halmaz. Egy hozzárendelés egy literál halmaz. Egy klózban vagy hozzárendelésben egy változó feltűnhet pozitív, vagy negatív literálként, de egyszerre mindkettőként nem-, vagy lehet, hogy egyáltalán nem fordulhat elő.

A klózok literáljaik diszunkciójaként vannak értelmezve. A hozzárendelések pedig literáljaik conjukciójaként vannak értelmezve.

Ha egy klóz vagy egy hozzárendelés pontosan *k* literált tartalmaz, akkor k-klóznak, vagy k-hozzárendelésnek nevezzük. Egy 1-klózt *egységnek*, egy 2-klózt *bináris klóz*nak nevezünk. Egy k-SAT probléma egy olyan klóz halmaz, ahol a klózoknak legfeljebb k literálja van. Egy klóz a klóz halmazból egy teljes-hosszú klóz akkor és csak akkor, ha tartalmaz minden változót a klóz halmazból.

Definiálunk néhány kiegészítő függvényt. Ha C egy klóz, akkor legyen azon változók halmaza, ami feltűnik C-ben. Legyen a negatív literálok halmaza C-ből, és legyen P(C) a pozitív literálok halmaza C-ből. Tudjuk hogy , és .

Két intuitív fogalmat használunk: NNP klóz, és NPP klóz. Egy klóz akkor és csak akkor NNP klóz, ha pontosan egy pozitív literált tartalmaz. Egy klóz akkor és csak akkor NPP klóz, ha pontosan egy negatív literált tartalmaz.

Ha egy literál az klóz halmazban, és literál nincs benne -ben, akkor azt mondjuk, hogy egy tiszta literál -ben.

A negációja halmaznak -val van jelölve, ami azt jelenti, hogy minden eleme negálva van. Vegyük figyelembe, hogy

Legyen a változók halmaza egy klóz halmazból véve. Azt mondjuk, hogy WW a *fehér klóz*, vagy a *fehér hozzárendelés* a V változóira, akkor és csak akkor, ha WW = V. Azt mondjuk, hogy BB a *fekete klóz* vagy a *fekete hozzárendelés*, V változóira, akkor és csak akkor, ha BB = . Például ha , akkor , és .

Azt mondjuk, hogy C *magába foglalja* D klózt, akkor és csak akkor, ha C részhalmaza D-nek.

Azt mondjuk, hogy S klóz halmaz *magába foglalja* C-t, akkor és csak akkor, ha -ben van olyan klóz, ami magába foglalja C-t. Alakian: .

Azt mondjuk, hogy C klózzal *jár* S klóz halmaz, akkor és csak akkor, ha minden teljes hosszú klóz, amit *magába foglal* C azt S is *magába foglalja*. A logikai értelmezése ennek a fogalomnak a következő: -vel jár S, akkor és csak akkor, ha C egy logikai következménye -nek. Magába foglalt klózokat beleértve vagy másképpen, a magába foglalt klózok is vele járnak.

Azt mondjuk, hogy C klóz független S klóz halmazban, akkor és csak akkor, ha -vel nem jár S\{C}. Egy teljes hosszú klóz független egy klóz halmazban, akkor és csak akkor, ha semmi nem foglalja magába.

Azt mondjuk, hogy M hozzárendelés egy megoldás S klóz halmazra nézve, akkor és csak akkor, ha minden -re igaz .

Azt mondjuk, hogy S klóz halmaz egy Fekete-Fehér SAT probléma, akkor és csak akkor, ha csak két megoldása van a fehér (WW) és a fekete (BB) hozzárendelés.

Azt mondjuk, hogy és klóz halmazok egyenlők, akkor és csak akkor, ha mindkettőnek az a megoldás halmaza. Azt mondjuk, hogy klóz halmazzal jár B klóz halmaz, akkor és csak akkor, ha -hoz tartozó megoldások halmaza tartalmazza a -hez tartozó megoldás halmazt, azaz -nak nem lehet más megoldása, csak . Ez a fogalom így van jelölve . Vegyük figyelembe, ha magába foglalja minden klózát, akkor .

Azt mondjuk, hogy erősebb -nél, akkor és csak akkor, ha és és nem egyenlőek. Ez a fogalom így van jelölve .

A felépítés egy irányított gráfot eredményez, ahol a csúcsok halmaza, és az élek halmaza. Egy él rendezett csúcsok párosa. Az (a, b) élet az –vel ábrázoljuk, és mondhatjuk, hogy *a*-nak van egy gyermeke *b*. Ha (a, b) egy elme az -nek, akkor azt mondjuk hogy (a, b) egy éle -nek.

Azt mondjuk, hogy egy kommunikációs gráf, akkor és csak akkor, ha minden -ra -ben igaz hogy nincs benne -ben, és ha eleme -nek, akkor nem lehet eleme. Szükségünk van erre a megszorításra, mert -ből egy logikai formulát generálunk. Ha kommunikációs gráfokról beszélünk, akkor gyakran használjuk a csomópont kifejezést a csúcs szinonimája ként.

Egy út -től -ig a irányított gráfban olyan csúcsok sorrendje , ami minden egyes -re igaz, hogy egy éle -nek. Egy út -től -ig irányított gráfban egy *kör*, akkor és csak akkor, ha egy éle -nek. Az kört a rekord ábrázolja. Ez a rekord használható elemek halmazaként. Vegyük figyelembe, hogy ebben az ábrázolásában a körnek az első és az utolsó eleme nem lehet ugyan az a csúcs.

Ha van egy körünk, akkor b egy kilépési pontja, akkor és csak akkor, ha valamennyi -re igaz, hogy egy él, és .

Egy irányított gráf teljes, akkor és csak akkor, ha minden pár külön álló csúcsokból össze van kötve egy pár egyedi éllel (eggyel minden irányba). Egy irányított gráf erősen összetett, vagy erősen irányított gráf, akkor és csak akkor, ha van út minden csúcsból minden más csúcsba. Vegyük figyelembe, hogy a teljes gráf egyben erős is. És azt is, hogy az erősen irányított gráf tartalmaz egy kört, ami tartalmaz minden csúcsot.

**IV. Gyenge modell**:

Ebben a részben a kommunikációs gráfok gyenge modelljét definiáljuk.

Tegyük fel, hogy , csak úgy, mint az előző részben. A gyenge modelljének a képlete: , ami azt jelenti, hogy ha egy csomópont tud üzenetet küldeni több mint egy csomópontnak, akkor csak az egyiknek küld, és ha visszakapja az üzenetet, akkor a következő csomópontnak küldi. Vegyük figyelembe, hogy egyenlő a klózzal.

Az egyetlen baj ezzel a reprezentációval, hogy az üzenet beszorulhat, ha a gráf tartalmaz köröket. Feltételezzük, hogy van egy körünk és két csomópontból. Azután küldjön üzenetet -nek, pedig -nek, és így tovább, ami azt jelenti, hogy más csomópontok soha nem kapják meg az üzenetet. Ez nem jó, hiszen a célunk, hogy minden csomópont tudjon üzenetet küldeni bármelyik másiknak, ha lehetséges.

Adjunk hozzá egy új élet a gráfhoz. Az új élnek -től -ba kellene mennie, úgy hogy legyen az új gráf. Most már van egy körünk és csomópontokkal. Most hozzá kell adnunk egy klózt a modellünkhöz, ami biztosítja, ha küld egy üzenetet a-nak, akkor és a tud üzenetet küldeni -nek és -nek, akkor a ne küldje vissza b-nek, hanem muszáj c-nek küldenie, amit így formalizálhatunk. Vegyük figyelembe, hogy ez ekvivalens klózzal.

Egy általánosabb módon, az csomópontnak, aminek kimenő élei vannak csomópontok irányába, azt a klóz mutatja be; és az kört a kilépési pontokkal a klóz mutatja be. Ezt a modellt hívjuk a kommunikációs gráfok gyenge modelljének.

**Alakian is definiáljuk.** Legyen D a kommunikációs gráf. Legyen D csúcsainak halmaza V és D éleinek halmaza E. Mivel D egy kommunikációs gráf, tudjuk, hogy V elemei pozitív literálokként használhatóak. Ezek után definiáljuk a következő fogalmakat:

.

.

.

, és bármely két eleme egy körnek nem lehet egyenlő, mivel egy halmaz.

.

.

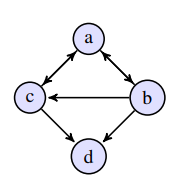
.

D-nek a gyenge modellje WM.

Vegyük figyelembe, hogy NodeRep egy részhalmaza a CycleRep-nek, mert minden csomópontot önmagában is körnek tekintjük, lásd a k=1 megszorítást a Cycles definíciójában, amit a maradék megszorítások diszjunkciójával kötöttünk össze. Tehát egy alternatív módon, így definiálhatjuk a WM-et. Nem használjuk ezt a megfigyelést ebben a munkában, habár néhány bizonyítás rövidebb lenne.

Kérem vegyük figyelembe, hogy WM-ben minden klóz tartalmaz legalább egy pozitív literált, és egy negatív literált, mert egy csomópont csak akkor van képviselve, ha van egy kimenő éle; és egy kör csak akkor van képviselve, ha van egy kilépési pontja, azaz WM kielégíthető bármilyen D komunikációs gráfra.

Nézzünk pár példát. Nem egyszerű leellenőrizni, hogy ez a SAT probléma valóban egy Fekete Fehér SAT probléma. Ezért először a teljes hosszú klóz halmazokat megmutatjuk, az változókon, egy index számmal (minden belépésnek a formája: index száma, teljes hosszú klóz):

1. Ábra. Egy kommunikációs gráf 4 csúccsal és 3 körrel.

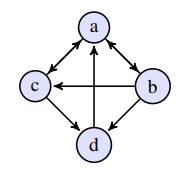
Az egyes ábra egy kommunikációs gráfot mutat 3 körrel:

.

Így a gyenge modellje (miután minden egyes klóznak a magába foglalt teljes klózok indexeit kilistázzuk az (1)-ből):

Vegyük figyelembe, hogy amióta d-nek nincs gyermeke, nem tűnik fel negatív literálként a modellben.

Vegyük figyelembe, hogy amióta a kommunikációs gráf az 1. Ábrán nem erősen összetett, a gyenge modellje („) nem Fekete Fehér SAT probléma. Például egy megoldása (2)-ben a SAT problémára,



1. Ábra Egy erősen összetett kommunikációs gráf 4 csúccsal és 6 körrel.

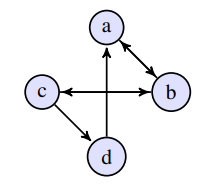
Második példaként megmutatjuk a gyenge modelljét a kommunikációs gráfnak a 2. Ábrán. Ebben a gráfban 6 körünk van:

.

Az utolsó kör tartalmazza az összes csúcsot, tehát nincs kilépési pontja, ezért nincs klóz generálva hozzá. Vegyük figyelembe, hogy a gráfban van egy élünk d-ből a-ba. A hozzá tartozó klózok az utolsó 3 klóz ebben a példában, az utolsó két klózhoz tartozik az új kör. A maradék klózok ugyan azok, mint az előző modellben. Tehát a gyenge modell (miután minden egyes klóznak a magába foglalt teljes klózok indexeit kilistázzuk az (1)-ből):

Vegyük észre, hogy mivel a kommunikációs gráf a 2. Ábrán erősen összetett, a gyenge modellje egy Fekete Fehér SAT probléma, azaz a SAT probléma a (3)-ban csak ez a két megoldása van: , és .

Minden egyes kör egy egyszerű kör volt a fenti két példában. Egy kör egyszerű, akkor és csak akkor, ha az első és az utolsó csúcsok ismétlődnek, tehát azt gondolhatjuk, hogy elég csak az egyszerű köröket számításba vennünk. A következő példa mutatja, azt az esetet, amikor a nem egyszerű köröket is számításba kell vennünk.



1. Ábra Egy erősen összetett kommunikációs gráf 4 csúccsal, 3 egyszerű körrel, és 1 nem egyszerű körrel.

A 3. Ábrán egy erősen összefüggő kommunikációs gráfot láthatunk, ami 3 egyszerű kört: , és egy nem egyszerű kört: tartalmaz. Harmadik példának a gyenge modellnek ezt a kommunikációs gráfot adjuk (miután minden egyes klóznak a magába foglalt teljes klózok indexeit kilistázzuk az (1)-ből):

.

Vegyük figyelembe, hogy az utolsó klóz egy nem egyszerű körből lett generálva, és a hozzá tartozó teljes hosszú klózt nem tartalmazza semelyik másik klóz sem.